第８講　整数問題

1　［1］　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

［2］　自然数の列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ は等比数列であるとし，

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$S'=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$$

$$T=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2$$　とおく．

(1)　整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となることを示せ．

(2)　T が素数となる場合の T の値を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　［1］　どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ．

［2］　$10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$ と $y \leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　どのような自然数 n に対しても $\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割り切れるような整数 a, b の組 $(a,\ b)$ は　$0<a\leqq 6m$　かつ　$0<b\leqq 6m$（ただし m は自然数）の範囲に全体で何組あるか．その個数を m で表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第８講　整数問題

> **1**　［1］　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ．ただし，$a<b$ とする．

題意の総和は初項 a，末項 b，項数 $b-a+1\,(>1)$ の等差数列の和である．

ゆえに　$\dfrac{(b-a+1)(a+b)}{2}=500$　　$(a+b)(b-a+1)=2^3\times5^3$

$b+a$ と $b-a+1$ は偶奇を異にする．

また　$(a+b)-(b-a+1)=2a-1>0$　より　$a+b>b-a+1$

さらに　$b-a+1>1$　より

　$(a+b,\ b-a+1)=(125,\ 8),\ (40,\ 25),\ (200,\ 5)$

したがって　$(a,\ b)=\mathbf{(59,\ 66),\ (8,\ 32),\ (98,\ 102)}$

> **1**　［2］　自然数の列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ は等比数列であるとし，
>
> $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$
>
> $S'=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$
>
> $T={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2$　とおく．
>
> (1)　整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となることを示せ．
>
> (2)　T が素数となる場合の T の値を求めよ．

(1)　$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=a(1+r+r^2+r^3+r^4)=$(整数)

　$S'=a(1-r+r^2-r^3+r^4)=$(整数)

　$T=a^2(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=$(整数)

$$
\begin{aligned}
SS'&=a^2(1+r+r^2+r^3+r^4)(1-r+r^2-r^3+r^4)\\
&=a^2\{(1+r^2+r^4)^2-(r+r^3)^2\}\\
&=a^2(1+r^4+r^8+2r^2+2r^6+2r^4-r^2-2r^4-r^6)\\
&=a^2(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=T
\end{aligned}
$$

したがって，整数 T は整数 S で割り切れ，その商は S' となる．

(2)　$T=SS'$ で T が素数のとき

S は 5 以上の自然数より，$S'=1$ かつ S は素数

$S'=1$ より　$a(1-r+r^2-r^3+r^4)=1$

　$a=1$　かつ　$1-r+r^2-r^3+r^4=1$

　　$r(r-1)(r^2+1)=0$　　$r>0$ より　$r=1$

このとき　$T=\mathbf{5}$

2 ［1］　どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ.

$n=0$のとき　$x=3m\geqq 0$ より

　0 以上の 3 の倍数はすべて表すことができる.

$n=1$ のとき　$x=3m+5=3(m+1)+2\geqq 5$ より

　5 以上の (3 の倍数)＋2 の形の整数はすべて表すことができる.

$n=2$ のとき　$x=3m+10=3(m+3)+1\geqq 10$ より

　10 以上の(3 の倍数)＋1 の形の整数はすべて表すことができる.

以上より 1，2，4，7 以外のすべての正の整数は表すことがきる.

また，$n\geqq 3$ のとき $x\geqq 15$ よりこの 4 数は表すことができない.

ゆえに，求める正の整数は　$x=$**1，2，4，7**

2 ［2］　$10^{2x}\leqq y\leqq 10^{5x}$ と $y\leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ.

$10^{2x}\leqq 10^{5x}$ より　$2x\leqq 5x$ ゆえに　$x\geqq 0$

$10^{2x}\leqq 10^{6-x}$ より　$2x\leqq 6-x$　　ゆえに　$x\leqq 2$

これらを同時に満たす y が存在するのは $0\leqq x\leqq 2$ のとき

　$x=0$ のとき $\begin{cases}10^0\leqq y\leqq 10^0\\ y\leqq 10^6\end{cases}$　よって　$y=1$　　ゆえに 1 組

　$x=1$ のとき $\begin{cases}10^2\leqq y\leqq 10^5\\ y\leqq 10^5\end{cases}$　よって　$10^2\leqq y\leqq 10^5$ ゆえに　$10^5-10^2+1=99901$ 組

　$x=2$ のとき $\begin{cases}10^4\leqq y\leqq 10^{10}\\ y\leqq 10^4\end{cases}$　よって　$y=10^4$　　ゆえに 1 組

以上より，求める個数は　$1+99901+1=$ **99903 (個)**

3 　どのような自然数 n に対しても $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割り切れるような整数 a，b の組$(a,\ b)$は　$0<a\leqq 6m$　かつ　$0<b\leqq 6m$（ただし m は自然数）の範囲に全体で何組あるか．その個数を m で表せ.

$S(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ とおくと

$$S(n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)b+n$$

$$S(2)=5a+3b+2=2(2a+b+1)+a+b$$

これが 2 で割り切れるので，$a+b$ は 2 の倍数

$S(3)=14a+6b+3=3(4a+2b+1)+2a$

これが3で割り切れるので，aは3の倍数

よって　$a+b=2p$，$a=3q$ (p，qは自然数)

つまり　$a=3q$，$b=2p-3q$　であることが必要である．

このとき　$S(n)=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)\cdot 3q+3(2p-3q)\}+n=n(n+1)\{p+(n-1)q\}+n$

これはnで割り切れる．

ゆえに　$S(n)$がnで割り切れるとき

$a=3q$，$b=2p-3q$　(p，qは自然数) と表すことができる．

$0<a\leqq 6m$より　$0<3q\leqq 6m$　つまり　$0<q\leqq 2m$

ゆえに　$1\leqq q\leqq 2m$　　よって，qは$2m$通り

$0<b\leqq 6m$より　$0<2p-3q\leqq 6m$　つまり　$\dfrac{3}{2}q<p\leqq 3m+\dfrac{3}{2}q$

よって，qのそれぞれに対しpは$3m$通り存在する．

以上より，求める組数は　$2m\cdot 3m=\boldsymbol{6m^2}$

第８講　整数問題　練習問題

1　２つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a，b は整数)が３で割り切れるとき，a，b はともに３で割り切れることを示せ．

(2)　x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

2　2次の多項式 $f(x)$ の係数はいずれも負でない整数であり，$f(1)=15$，$f(2)=33$ であるとする．さらに，自然数 n に対して $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ はつねに n で割り切れるものとする．このような $f(x)$ をすべて求めよ．

第 8 講　整数問題　　練習問題　解答

1　2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a，b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ．

(2)　x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

解答例

(1)　ある自然数 n を 3 で割った余りは 0，1，2 のいずれかである．　← 剰余による分類

よって，n^2 を 3 で割った余りは 0，1 のいずれかである．

したがって，a^2+b^2 が 3 で割りきれるのは a^2，b^2 を 3 で割った余りがともに 0 のときのみである．

このとき，a，b はともに 3 で割り切れる．

よって，題意は示された．

> n が整数のとき，
> n^2 がある数の倍数ならば n もその数の倍数である（背理法より自明）．

(2)　$9x$ が集合 A の要素であるとき

$9x=a^2+b^2$　と表すことができる．

よって，a^2+b^2 は 9 の倍数すなわち 3 の倍数であり，このとき，(1)より，a，b はともに 3 で割り切れる．

よって　$a=3p$，$b=3q$　(p，q は整数)　とおくと，

$$9x=9p^2+9q^2$$

$$x=p^2+q^2$$

よって，x は集合 A の要素であり，題意は示された．

2　2次の多項式 $f(x)$ の係数はいずれも負でない整数であり，$f(1)=15$，$f(2)=33$ であるとする．さらに，自然数 n に対して $f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ はつねに n で割り切れるものとする．このような $f(x)$ をすべて求めよ．

解答例

$f(x)=ax^2+bx+c$（a は自然数，b，c は0以上の整数）とおく．

$f(1)=a+b+c=15$

$f(2)=4a+2b+c=33$

これらより，$b=-3a+18$，$c=2a-3$

$b\geqq 0$ より　$-3a+18\geqq 0$　　$a\leqq 6$

$c\geqq 0$ より　$2a-3\geqq 0$　　$a\geqq \dfrac{3}{2}$

よって　$\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 6$　つまり　$2\leqq a\leqq 6$

このとき

$$
\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c)\\
&=a\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(-3a+18)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(2a-3)\cdot n\\
&=n\left\{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)a-\frac{3}{2}(n+1)a+9(n+1)+2a-3\right\}\\
&=n\left\{\frac{1}{3}(n+1)(n-4)a+2a+9n+6\right\}
\end{aligned}
$$

これが常に n で割り切れるのは a が3の倍数のときである．

よって　$a=3,\ 6$

ゆえに，求める $f(x)$ は

$f(x)=3x^2+9x+3$，　$f(x)=6x^2+9$